Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 2

Lunes 9 de mayo de 2022 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

2222 – 7122

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

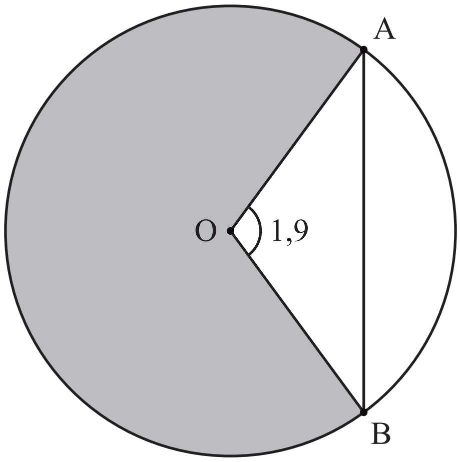
Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra un círculo de 5 metros de radio y con centro en O.

Los puntos A y B pertenecen a la circunferencia y $\mathrm{A\hat{O}B} = 1{,}9$ radianes.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle la longitud de la cuerda $[\mathrm{AB}]$. [3]

(b) Halle el área del sector circular sombreado. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Puntuación máxima: 5]

La derivada de la función g viene dada por $g'(x) = 3x^2 + 5e^x$, donde $x \in \mathbb{R}$. El gráfico de g pasa por el punto $(0, 4)$. Halle $g(x)$.

3. [Puntuación máxima: 6]

Los sucesos A y B son independientes y $\mathrm{P}(A) = 3\mathrm{P}(B)$.

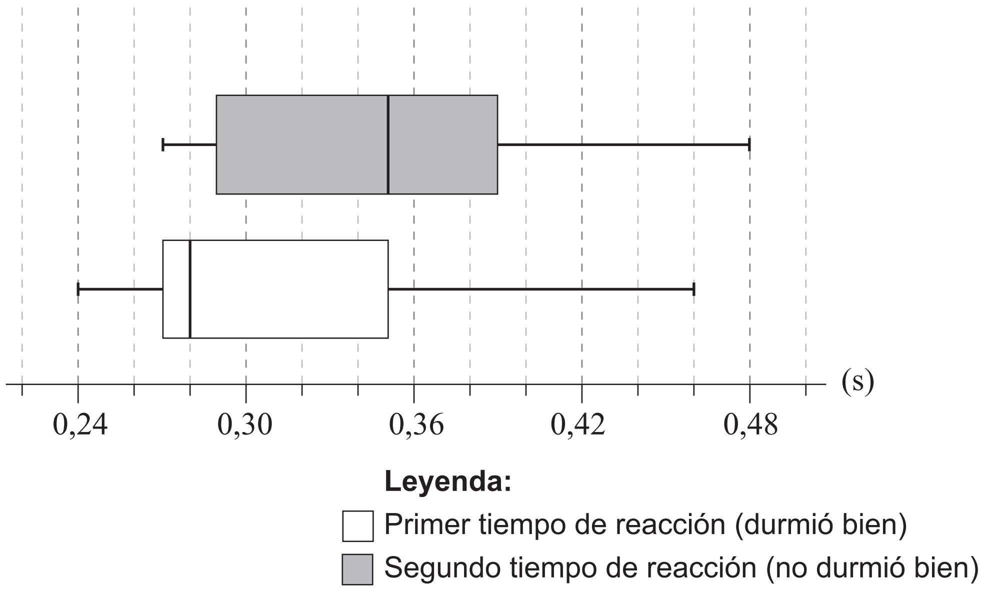
Sabiendo que $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}68$, halle $\mathrm{P}(B)$.

4. [Puntuación máxima: 6]

Se seleccionó una muestra aleatoria compuesta por nueve adultos para comprobar si dormir bien afectaba al tiempo de reacción ante un estímulo visual. El tiempo de reacción de cada adulto se midió dos veces.

La primera medición del tiempo de reacción se hizo una mañana después de que el adulto hubiera dormido bien. La segunda medición se hizo una mañana después de que ese mismo adulto no hubiera dormido bien.

A continuación se muestran los diagramas de caja y bigotes correspondientes a esos tiempos de reacción (medidos en segundos).



Considere el diagrama de caja y bigotes que representa los tiempos de reacción después de haber dormido bien.

(a) Indique la mediana de los tiempos de reacción después de haber dormido bien. [1]

(b) Verifique que una medición de $0,46$ segundos no es un valor atípico. [3]

(c) Indique por qué parece que la media de los tiempos de reacción es mayor que la mediana de los tiempos de reacción. [1]

Considere ahora los dos diagramas de caja y bigotes.

(d) Comente si estos diagramas de caja y bigotes proporcionan alguna prueba que sugiera que no dormir bien hace que aumente el tiempo de reacción. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 4: continuación)

5. [Puntuación máxima: 7]

Una partícula se mueve en línea recta de modo tal que su velocidad ($v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) en el instante t segundos viene dada por $v = \frac{(t^2+1)\cos t}{4}$, $0 \le t \le 3$.

(a) Determine cuándo cambia el sentido del movimiento de la partícula. [2]

(b) Halle en qué instantes la aceleración de la partícula es igual a $-1{,}9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. [3]

(c) Halle la aceleración de la partícula cuando su rapidez es máxima. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

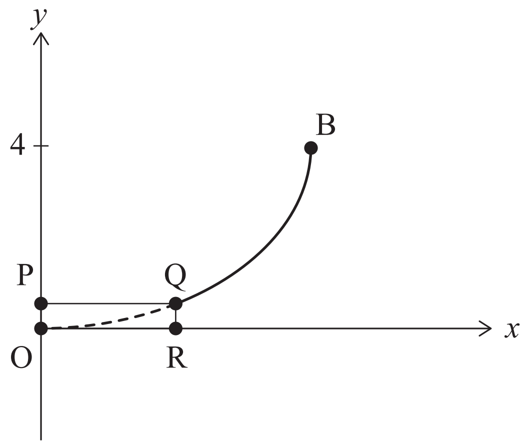
. . . .

. . . .

6. [Puntuación máxima: 5]

La siguiente figura muestra la curva $\frac{x^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$, donde $h \le y \le 4$.

la figura no está dibujada a escala



El fragmento de curva que va del punto Q al punto B se rota $360°$ alrededor del eje y para generar la superficie interior de un cuenco. El rectángulo OPQR, de $h\,\mathrm{cm}$ de altura, se rota $360°$ alrededor del eje y para generar una base sólida.

Se supone que el cuenco tiene un espesor despreciable.

Sabiendo que el volumen interior del cuenco tiene que ser igual a $285\,\mathrm{cm}^3$, determine la altura de la base.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Puntuación máxima: 8]

Considere $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(\cos x) - k}{x^2}$, donde $k \in \mathbb{R}$.

(a) Muestre que existe un límite finito únicamente para $k = \frac{\pi}{4}$. [2]

(b) Utilizando la regla de L'Hôpital, muestre por medio de métodos algebraicos que el valor del límite es $-\frac{1}{4}$. [6]

8. [Puntuación máxima: 7]

Rachel y Sophia están participando en una competición de lanzamiento de jabalina.

Las distancias (R metros) que alcanza Rachel siguen una distribución normal de media $56,5$ y desviación típica igual a 3.

Las distancias (S metros) que alcanza Sophia siguen una distribución normal de media $57,5$ y desviación típica igual a $1,8$.

En la primera ronda de la competición, cada participante tiene cinco lanzamientos. Para clasificarse para la siguiente ronda de la competición, la participante debe lograr al menos un lanzamiento de 60 metros o más en la primera ronda.

Halle la probabilidad de que únicamente una de las dos, Rachel o Sophia, se clasifique para la siguiente ronda de la competición.

9. [Puntuación máxima: 4]

Considere el conjunto de números enteros positivos de seis cifras que se pueden formar con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Halle cuántos números enteros positivos de seis cifras se pueden formar que cumplan lo siguiente:

(a) Las cifras son todas distintas. [2]

(b) Las cifras son todas distintas y están dispuestas en orden creciente. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 15]

Un científico ha realizado un experimento de nueve semanas de duración con dos plantas (A y B) de la misma especie. Quería averiguar qué efecto tiene el uso de un nuevo fertilizante. La planta A recibió fertilizante con regularidad, mientras que la planta B no lo recibió.

El científico halló que la altura de la planta A (h_A cm) después de t semanas se podía modelizar mediante la función $h_A(t) = \operatorname{sen}(2t+6) + 9t + 27$, donde $0 \le t \le 9$.

El científico halló que la altura de la planta B (h_B cm) después de t semanas se podía modelizar mediante la función $h_B(t) = 8t + 32$, donde $0 \le t \le 9$.

(a) Utilice los modelos del científico para hallar la altura inicial de:

(i) La planta B

(ii) La planta A, redondeando a tres cifras significativas [3]

(b) Halle los valores de t para los cuales $h_A(t) = h_B(t)$. [3]

(c) Para $t > 6$, pruebe que la planta A siempre fue más alta que la planta B. [3]

(d) Para $0 \le t \le 9$, halle el tiempo total durante el cual el ritmo de crecimiento de la planta B fue mayor que el ritmo de crecimiento de la planta A. [6]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 20]

Dos aviones (A y B) tienen por vector de posición respecto al origen O, respectivamente,

$$\boldsymbol{r}_A = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donde t representa el tiempo en minutos y $0 \le t \le 2{,}5$.

Las componentes de cada vector columna representan el desplazamiento hacia el este de O, el desplazamiento hacia el norte de O y la altura sobre el nivel del mar, y todas ellas se miden en kilómetros.

(a) Halle la demora —expresada con tres cifras— con la que está viajando el avión B. [2]

(b) Muestre que el avión A viaja a mayor velocidad que el avión B. [2]

(c) Halle el ángulo agudo que forman las trayectorias de vuelo de los dos aviones. Dé la respuesta en grados. [4]

Las trayectorias de vuelo de los dos aviones se cruzan en el punto P.

(d) (i) Halle las coordenadas de P.

(ii) Determine el tiempo que transcurre desde que el primer avión llega a P hasta que el segundo avión llega a P. [7]

Sea $D(t)$ la distancia que hay entre el avión A y el avión B para $0 \le t \le 2{,}5$.

(e) Halle el valor mínimo de $D(t)$. [5]

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 21]

La población (P) de una especie concreta de marsupiales que hay en una pequeña isla remota se puede modelizar mediante la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

donde t es el tiempo medido en años, y k, N son constantes positivas.

La constante N representa la población máxima de esta especie de marsupiales que la isla puede mantener de manera indefinida.

(a) En el contexto de este modelo poblacional, interprete el significado de $\frac{dP}{dt}$. [1]

(b) Muestre que $\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{N}\right)\left(1 - \frac{2P}{N}\right)$. [4]

(c) A partir de lo anterior, muestre que el ritmo al que aumenta la población de marsupiales será máximo cuando $P = \frac{N}{2}$. Justifique su respuesta. [5]

(d) A partir de lo anterior, determine el valor máximo de $\frac{dP}{dt}$ en función de k y N. [2]

Sea P_0 la población inicial de marsupiales.

(e) Resolviendo la ecuación diferencial logística, muestre que su solución se puede expresar de la siguiente forma:

$$kt = \ln \frac{P}{P_0}\left(\frac{N - P_0}{N - P}\right).$$ [7]

Al cabo de 10 años, la población de marsupiales es igual a $3P_0$. Además, se sabe que $N = 4P_0$.

(f) Halle el valor de k correspondiente a este modelo poblacional. [2]

Referencias:

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.